4.3.3 Goniometrické nerovnice I

Předpoklady: 4302

Pedagogická poznámka: Nerovnice je stejně jako rovnice možné řešit grafem i jednotkovou kružnicí. Oba způsoby mají své výhody i nevýhody a jsou v podstatě rovnocenné. Po vyřešení prvních čtyř příkladů nechávám studentům svobodu volby. Při řešení nerovnic, které obsahují tg nebo cotg používáme grafy funkcí.

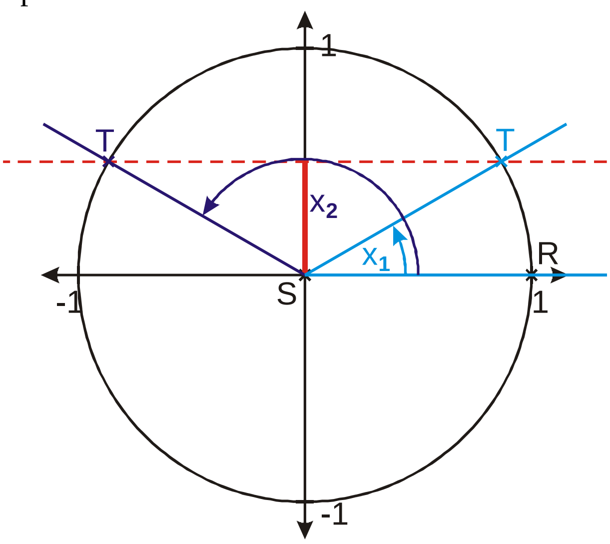
V této hodině se projeví, jak jsou na tom studenti opravdu s představami o zachycení goniometrických funkcí v jednotkové kružnici. Pokud se objeví tyto problémy, je třeba nejdříve odstranit je a pak se teprve zabývat nerovnicemi.

Goniometrické funkce (zejména sinus a cosinu) mají něco společného s kvadratickou funkcí – nejsou prosté $\Rightarrow$ řešení goniometrický nerovnic probíhá podobně jako řešení kvadratických nerovnic ve dvou krocích:

- vyřešíme rovnici
- kořeny získané v předchozím kroku využijeme k nakreslení obrázku nebo vynesení do grafu, podle kterého rozhodneme o řešení nerovnice.

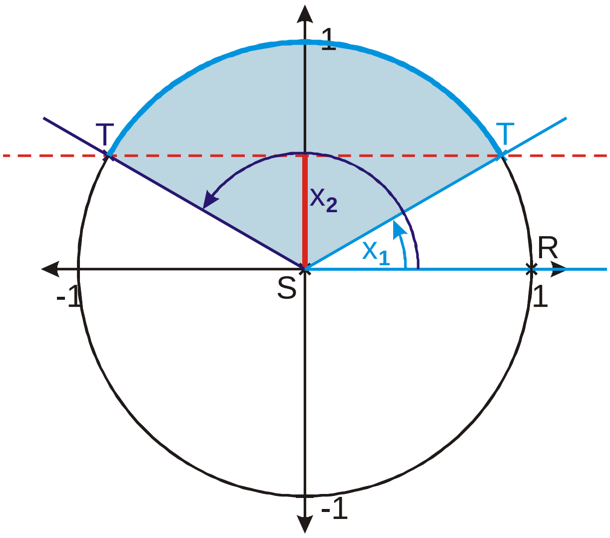
Př. 1: Vyřeš nerovnici $\sin x \geq \frac{1}{2}$.

Umíme vyřešit rovnici $\sin x = \frac{1}{2}$. Nakreslíme jednotkovou kružnici a vyřešíme nerovnost s pomocí obrázku.



Řešení rovnice $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{5}{6}\pi$.

Na jednotkové kružnici hledáme čísla, pro která $\sin x \geq \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ mají y-ovou souřadnici větší (nebo rovnou) $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ jsou výše (nebo stejně vysoko) než čísla vyhovující rovnici $\sin x = \frac{1}{2}$.



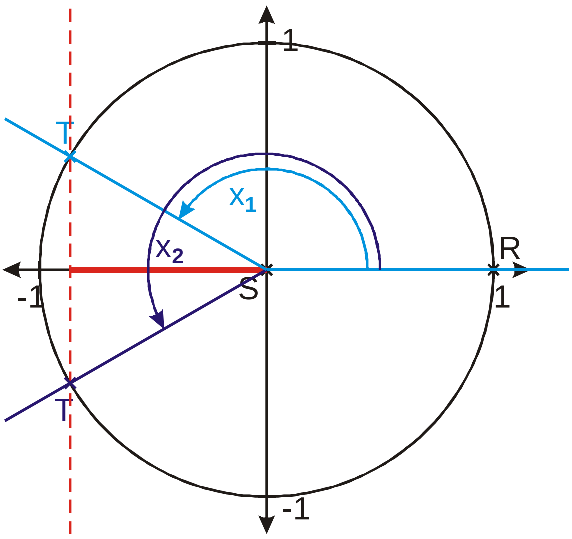
Řešením nerovnice jsou všechna čísla v intervalu $\left\langle \frac{\pi}{6}; \frac{5}{6}\pi \right\rangle$.

Hodnoty se opakují s periodou 2π $\Rightarrow$ řešením je každý interval $\left\langle \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi; \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \right\rangle$.

$K = \bigcup_{k \in Z} \left\langle \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi; \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \right\rangle$

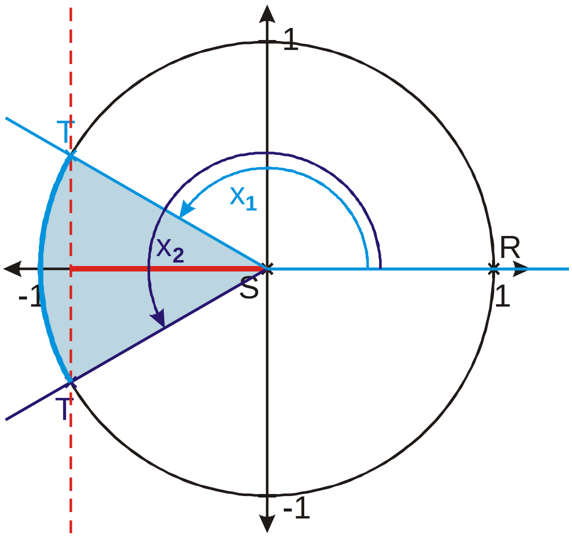
Př. 2: Vyřeš nerovnici $\cos x \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Kromě jednotkové kružnice využij i graf funkce $y = \cos x$.

Umíme vyřešit rovnici $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Řešení rovnice $x_1 = \frac{5}{6}\pi$, $x_2 = \frac{7}{6}\pi$.

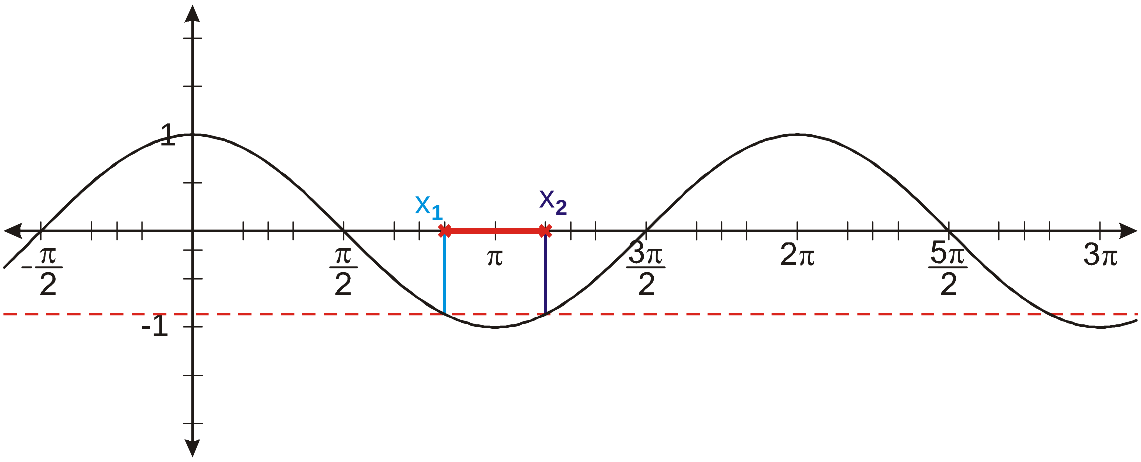
Na jednotkové kružnici hledáme čísla, pro která $\cos x \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ mají x-ovou souřadnici menší (nebo rovnou) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ jsou více vlevo (nebo stejně vlevo) jako čísla vyhovující rovnici $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Řešením nerovnice jsou všechna čísla v intervalu $\left\langle \frac{5}{6}\pi ; \frac{7}{6}\pi \right\rangle$.

Kontrola pomocí grafu funkce $y = \cos x$.

Do grafu vyznačíme hodnotu $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$:



Na ose x hledáme čísla, pro která $\cos x \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ hodnoty funkce jsou menší (nebo jsou rovny) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ jsou níže (nebo stejně nízko) jako body přímky $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

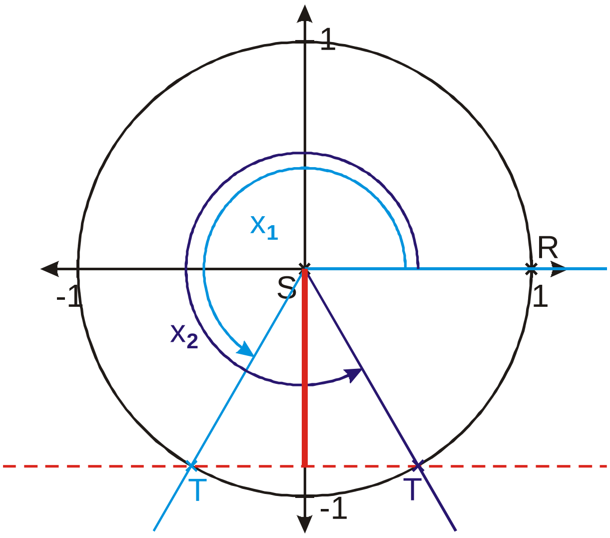
Řešením nerovnice jsou všechna čísla v intervalu $\left\langle \frac{5}{6}\pi ; \frac{7}{6}\pi \right\rangle$.

Hodnoty se opakují s periodou 2π $\Rightarrow$ řešením je každý interval $\left\langle \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi ; \frac{7}{6}\pi + k \cdot 2\pi \right\rangle$.

$$K = \bigcup_{k \in Z} \left\langle \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi ; \frac{7}{6}\pi + k \cdot 2\pi \right\rangle$$

Pedagogická poznámka: U slabších studentů povoluji, aby ve všech následujících příkladech používali metodu, která je pro ně jednodušší.

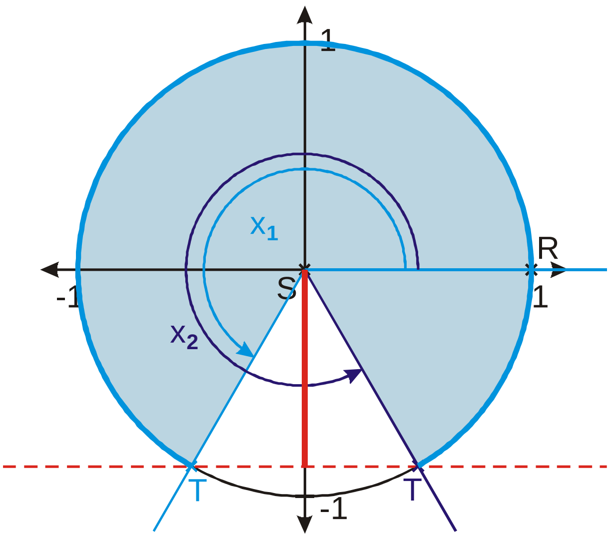
Př. 3: Vyřeš nerovnici $\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Při řešení využij obrázek jednotkové kružnice.



Základní řešení rovnice $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x_1 = \frac{4}{3}\pi$, $x_2 = \frac{5}{3}\pi$.

Hledáme čísla, pro která $\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ mají y-ovou souřadnici větší než $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ leží na jednotkové kružnici výše než čísla vyhovující rovnici $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Vybarvená čísla nemůžeme zapsat intervaly:

- $\left\langle \frac{5}{3}\pi; \frac{4}{3}\pi \right\rangle$ (v intervalu píšeme vždy nejdříve menší číslo)
- $\left\langle \frac{4}{3}\pi; \frac{5}{3}\pi \right\rangle$ (ten obsahuje mimo krajní body čísla, která nejsou řešením nerovnice)

$\Rightarrow$ použijeme pro jeden z krajních bodů číslo, které není v intervalu $\left\langle 0; 2\pi \right)$ $\Rightarrow$ dvě možnosti:

- $\frac{5}{3}\pi - 2\pi = -\frac{1}{3}\pi$ $\Rightarrow$ získáme interval $\left\langle -\frac{1}{3}\pi; \frac{4}{3}\pi \right\rangle$,

- $\frac{4}{3}\pi + 2\pi = \frac{10}{3}\pi \Rightarrow$ získáme interval $\left\langle \frac{5}{3}\pi; \frac{10}{3}\pi \right\rangle$.

Oba předchozí intervaly jsou navzájem posunuté o 2π.

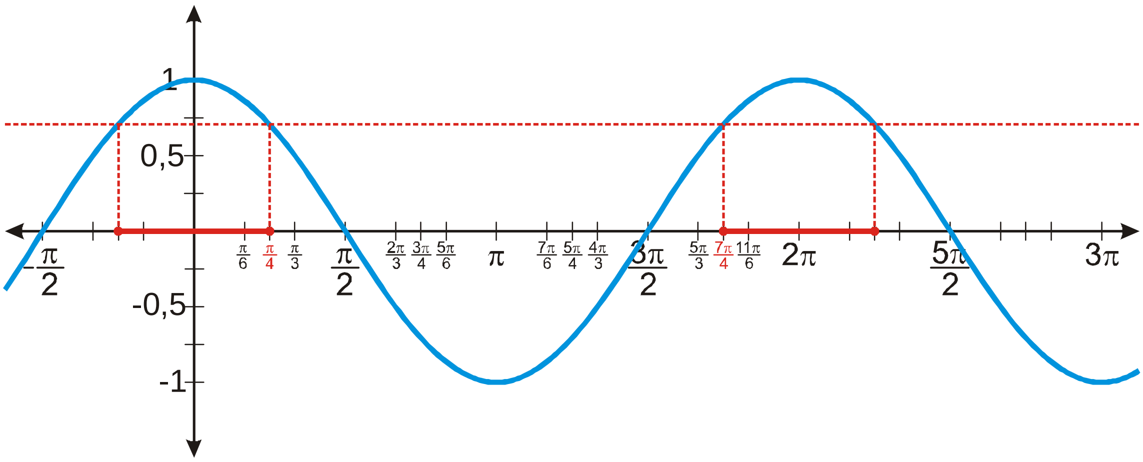
Hodnoty se opakují s periodou $2\pi \Rightarrow$ řešením je každý interval $\left\langle -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi; \frac{4}{3}\pi + k \cdot 2\pi \right\rangle$.

$K = \bigcup_{k \in Z} \left\langle -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi; \frac{4}{3}\pi + k \cdot 2\pi \right\rangle$

Př. 4: Vyřeš nerovnici $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Při řešení využij graf funkce $y = \cos x$.

Rovnice $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ má v intervalu $\langle 0; 2\pi)$ dvě řešení: $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{7}{4}\pi$.

Nakreslíme graf funkce a zobrazíme do něj hodnotu $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Řešení v intervalu $\langle 0; 2\pi)$ bychom museli zapsat pomocí dvou intervalů $\left\langle 0; \frac{\pi}{4} \right\rangle \cup \left\langle \frac{7}{4}\pi; 2\pi \right)$.

Zápis se značně zjednoduší, když vybereme čísla mimo interval $\langle 0; 2\pi)$:

- řešení pomocí intervalu kolem 0 $\Rightarrow \left\langle -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$,
- řešení pomocí intervalu kolem $2\pi \Rightarrow \left\langle \frac{7}{4}\pi; \frac{9}{4}\pi \right\rangle$.

Oba předchozí intervaly jsou navzájem posunuté o 2π.

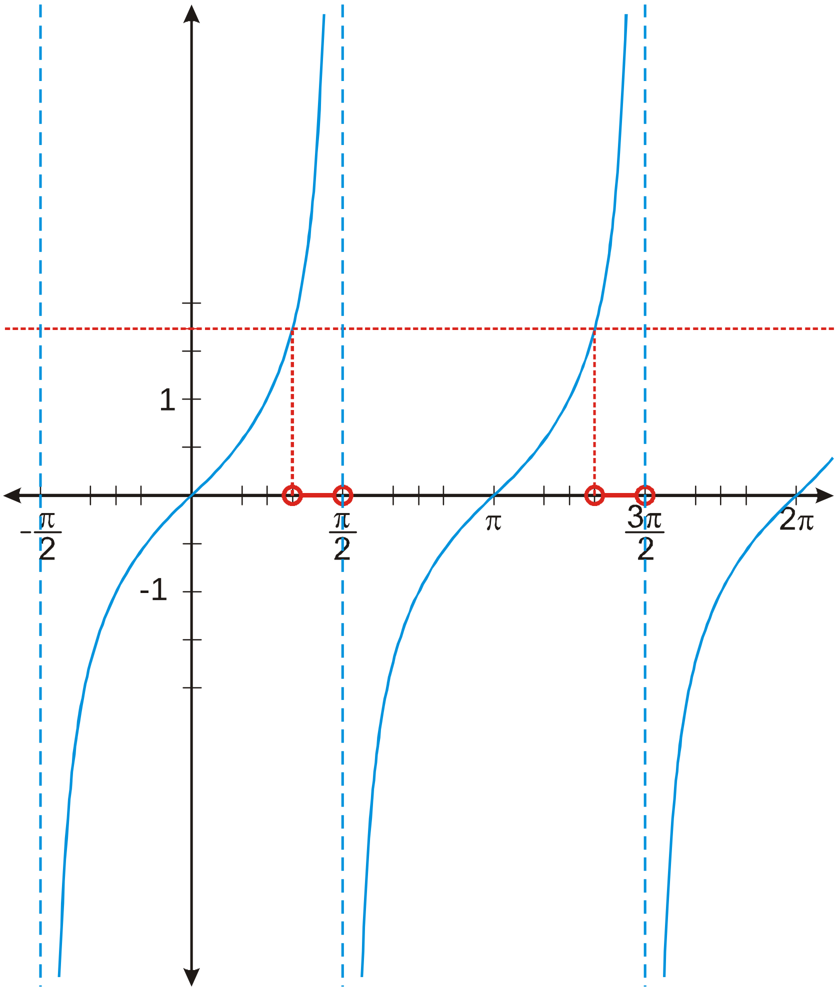
Hodnoty se opakují s periodou $2\pi \Rightarrow$ řešením je každý interval $\left\langle -\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi; \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \right\rangle$.

$K = \bigcup_{k \in Z} \left\langle -\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi; \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \right\rangle$

Př. 5: Vyřeš nerovnici $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$.

Rovnice $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ má v intervalu $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ jediné řešení: $x = \frac{\pi}{3}$.

Nakreslíme graf funkce $y = \operatorname{tg} x$ a zobrazíme do něj hodnotu $\sqrt{3}$.

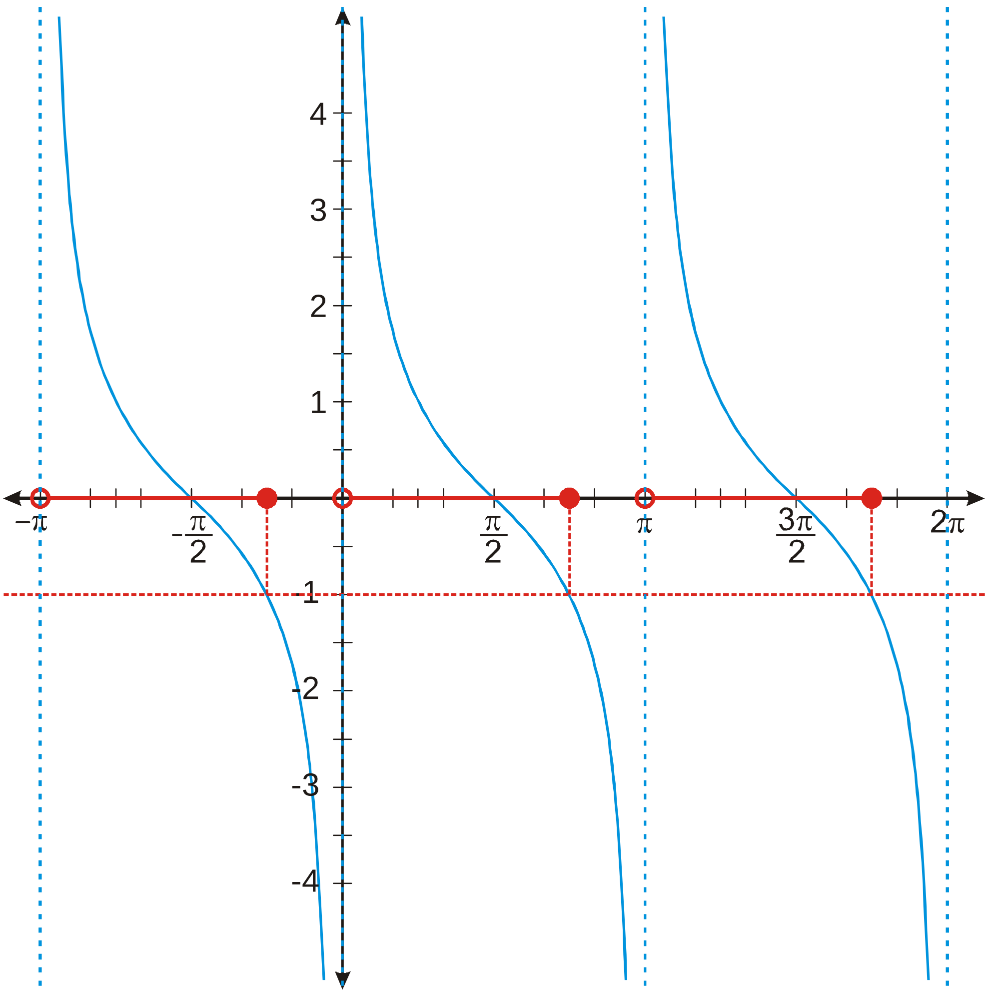


Řešení v intervalu $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ můžeme zapsat jako $\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right)$, hodnoty funkce $y = \operatorname{tg} x$ se opakují s periodou $\pi \Rightarrow K = \bigcup_{k \in Z}\left(\frac{\pi}{3} + k\cdot\pi;\frac{\pi}{2} + k\cdot\pi\right)$.

Př. 6: Vyřeš nerovnici $\operatorname{cotg}\ x \geq -1$.

Rovnice $\operatorname{cotg} x = -1$ má v intervalu $(0;\pi)$ jediné řešení: $x = \frac{3}{4}\pi$.

Nakreslíme graf funkce a zobrazíme do něj hodnotu -1.



Řešení v intervalu $(0;\pi)$ můžeme zapsat jako $\left(0;\frac{3}{4}\pi\right\rangle$, hodnoty funkce $y=\operatorname{cotg} x$ se opakují s periodou π $\Rightarrow$ $K=\bigcup_{k\in Z}\left(0+k\cdot\pi;\frac{3}{4}\pi+k\cdot\pi\right\rangle$.

Př. 7: Petáková:
strana 55/cvičení 26 a) b)

Shrnutí: Při řešení goniometrických nerovnic využíváme grafy goniometrických funkcí (nebo znázornění pomocí jednotkové kružnice) a řešení odpovídajících goniometrických rovnic.